التمرين الأول:(06نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء وأربع كريات خضراء وخمس كريات حمراء (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي أن واحد.

I. احسب احتمال الحوادث الآتية:

أ) A : الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون.

ب) B : الحصول على ثلاث كريات مختلفة مثنى مثنى.

ج) C :الحصول على كرية بيضاء على الأقل.

II. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان.

1) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

2) احسب أمله الرياضياتي $E(X)$ وتباينه $V(X)$ وانحرافه المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الثاني: (06نقاط)

اجب بصحيح أو خطأ في كل حالة مع التعليل (الإجابة غير المبررة لا تؤخذ بعين الاعتبار):

1) من أجل كل عدد طبيعي n .العدد 3 يقسم $2^{2n}-1$.

2) إذا كان العدد الصحيح x حل للمعادلة $x^2+x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[3]$.

3) الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ حلول المعادلة $12x-5y=3$ هي $(10k+4;24k+9)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) توجد ثنائية وحيدة من الأعداد الطبيعية $(a;b)$ بحيث إذا كان $a<b$ فإن $PPCM(a,b)-PGCD(a,b)=1$

5) العددان الطبيعيان M و N حيث M يكتب في النظام العشري abc و N يكتب في النظام العشري bca.

إذا كان M مضاعف للعدد 27 فإن $M-N$ مضاعف لـ 27 .

التمرين الثالث: (08نقاط)

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$

1) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2 < u_n < 4$.

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$

4) استنتج أن: $4 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n.ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث. $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

1) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ بطريقة أخرى .

4) احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث:

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$ و $T_n = \dfrac{1}{u_0 - 2} + \dfrac{1}{u_1 - 2} + \dfrac{1}{u_2 - 2} + \cdots + \dfrac{1}{u_{n-1} - 2}$.

5) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الأول:

I. عدد الإمكانيات: $C_{12}^{3} = 220$

أ) حساب $P(A)$: $P(A) = \dfrac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{220} = \dfrac{3}{44}$

ب) حساب $P(B)$: $P(A) = \dfrac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{220} = \dfrac{3}{11}$

ج) حساب $P(C)$: $P(C) = \dfrac{C_3^1 \times C_9^2 + C_3^2 \times C_9^1 + C_3^3}{220} = \dfrac{136}{220} = \dfrac{34}{55}$

II. 1) قيم المتغير العشوائي X

$$X \in \{1;2;3\}$$

قانون الاحتمال :

$$P(X=1) = P(A) = \frac{3}{44}$$

$$P(X=3) = P(B) = \frac{3}{11}$$

$$P(X=2) = 1 - \frac{3}{11} - \frac{3}{44} = \frac{29}{44}$$

2) الأمل الرياضياتي: $E(X) = \dfrac{97}{44}$

التباين: $V(X) = \dfrac{584}{1936} = 0.30$ الانحراف المعياري $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,54$

التمرين الثاني:

1) صحيح: التعليل $4 \equiv 1[3]$ ومنه $\left(2^2\right)^n \equiv 1^n[3]$ وبالتالي $2^{2n}-1 \equiv 0[3]$

2) خطأ التعليل: $x^2+x = x(x+1)$

$x^2+x = x(x+1)$

$x^2+x \equiv 0[3]$ يكافئ $x+1 \equiv 0[3]$ أو $x \equiv 0[3]$ أي أن $x \equiv 2[3]$ أو $x \equiv 0[3]$.

3) خطأ: $12x-5y=3$ لدينا $(4;9)$ حل خاص للمعادلة

5 يقسم $12(x-4)$ و 5 و 12 أوليان فيما بينهما. حسب مبرهنة غوص 5 يقسم $x-4$ ومنه $x=5k+4$ و $y=12k+9$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4) صحيح: التعليل نضع $a = da'$ و $b = db'$ حيث $d = PGCD(a;b)$ و $PGCD(a';b')=1$

ومنه $PPCM(a;b) = da'b'$ بالتعويض في المعادلة نجد: $d(a'b'-1)=1$ ومنه d يقسم 1 وبالتالي $d=1$

ومنه $PPCM(a;b)=ab$ إذن $ab-1=1$ ومنه $ab=2$ الثنائيات المحققة $(1;2)$ و $(2;1)$ وبما أن $a<b$ فإن الثنائية الوحيدة $(1;2)$

5) صحيح: التعليل

$M=100a+10b+c=27k$ و $N=100b+10c+a$. حيث $k \in \mathbb{N}$

$M-N=9(11a-10b-c)=9(11a+100a-27k)=27(37a-k)$

ومنه $M-N$ مضاعف لـ 27

التمرين الثالث:

I.

1) البرهان بالتراجع أن: $2 < u_n < 4$ من أجل كل عدد طبيعي n . نسمي الخاصية $P(n)$

نتحقق من صحة $P(0)$: $u_0 = 3$ و $2 < 3 < 4$ محققة.

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n

نفرض $2 < u_n < 4$ ونبرهن $2 < u_{n+1} < 4$.حيث $u_{n+1} = 8 - \dfrac{24}{u_n + 2}$

$2 < u_n < 4$ بإضافة 2 نجد $4 < u_n + 2 < 6$ ومنه $-6 < \dfrac{-24}{u_n + 2} < -4$ ومنه $2 < u_{n+1} < 4$ من أجل كل عدد طبيعي n .ومنه $2 < u_n < 4$

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$ ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة.

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) $4 - u_{n+1} = \dfrac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$ لدينا (u_n) متزايدة وحدها الأول $u_0 = 3$ ومنه $3 \le u_n$

لدينا $3 \le u_n$ ومنه $\dfrac{1}{u_n + 2} \le \dfrac{1}{5}$ و بالضرب في $4(4 - u_n)$ نجد $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$.

4) لدينا: $4 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$ ومنه

$$4 - u_1 \le \frac{4}{5}(4 - u_0)$$

$$4 - u_2 \le \frac{4}{5}(4 - u_1)$$

.

.

.

$4 - u_n \le \dfrac{4}{5}(4 - u_{n-1})$ بالضرب طرف الى طرف نجد: $4 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

لدينا $\left(\frac{4}{5}\right)^n \geq 4-u_n > 0$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} 4-u_n = 0$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

.II

1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2} = \frac{8-\frac{24}{u_n+2}-4}{8-\frac{24}{u_n+2}-2} = \frac{4u_n-16}{6u_n-12} = \frac{4}{6}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -1$

2) عبارة الحد العام: $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا: $v_n = 1-\frac{2}{u_n-2}$ ومنه $u_n = 2-\frac{2}{v_n-1} = 2+\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$

3) $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2+\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 4$

4) حساب S_n : $S_n = -\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = -3(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n)$

حساب T_n: لدينا $v_n = 1-\frac{2}{u_n-2}$ ومنه $v_n - 1 = -\frac{2}{u_n-2}$ أي أن $\frac{1}{2}(1-v_n) = \frac{1}{u_n-2}$

ومنه $T_n = \frac{1}{2}(1-v_0+1-v_1+\ldots+1-v_{n-1})$ وبالتالي $T_n = \frac{1}{2}(n-S_n) = \frac{1}{2}(n+3(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n)$